УДК 681.518 (045)

Жолдаков О.О.

ВИРІШЕННЯ ЗАДАЧІ ПРИЗНАЧЕННЯ ВИКОНАВЦІВ ТЕХНІЧНОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ПОВІТРЯНИХ СУДЕН

Національний авіаційний університет

Описано задачу призначення виконавців для виконання послідовностей робіт технічного обслуговування повітряних суден. Сформовано основні положення математичної моделі задачі у канонічному вигляді. Наведено аналіз підмножини варіантів та розглянуто обчислення оцінки критеріальної функції на кожній підмножині варіантів розв'язку лінійної комбінаторної задачі.

Вступ

Операції технічного обслуговування повітряних суден широко виконуються по всьому світу. Одночасно на повітряному судні можуть працювати кілька механіків, що вимагає ретельного планування та координації робіт для того, щоб контролювати переміщення персоналу, активацію частин літака і використання хімічних речовин. Організація необхідного порядку та чистоти важлива для запобігання плутаниці на злітній смузі.

Багато вчених і спеціалістів усього світу постійно ставлять і вирішують різноманітні задачі, які стосуються цієї проблеми. Вирішення комплексу задач технічного обслуговування повітряних суден покликане підвищити ефективність виконання робіт на основі використання сучасних інформаційних технологій керування процесами.

Формальна постановка задачі керування передпольотним технічним обслуговуванням повітряних суден відноситься до класу нелінійних частково-цілісних екстремальних задач із булевими змінними [1]. Алгоритмів вирішення задач даного класу на цей час не існує, а принципові труднощі, що виникають на шляху створення подібних алгоритмів, не дають підстав сподіватися на те, що вони з'являться у недалекому майбутньому.

Тому доцільно провести декомпозицію задачі оперативного управління ТО ПС на дві задачі:

– задачу розподілу операцій між групами виконавців;

– задачу призначення часу початку робіт.

Перша з них є нелінійною, тому пропонується [2] виконати декомпозицію задачі розподілу операцій між групами виконавців на дві (рис. 1):

– побудова допустимих послідовностей робіт для кожного виконавця;

– призначення виконавців для виконання послідовностей робіт.

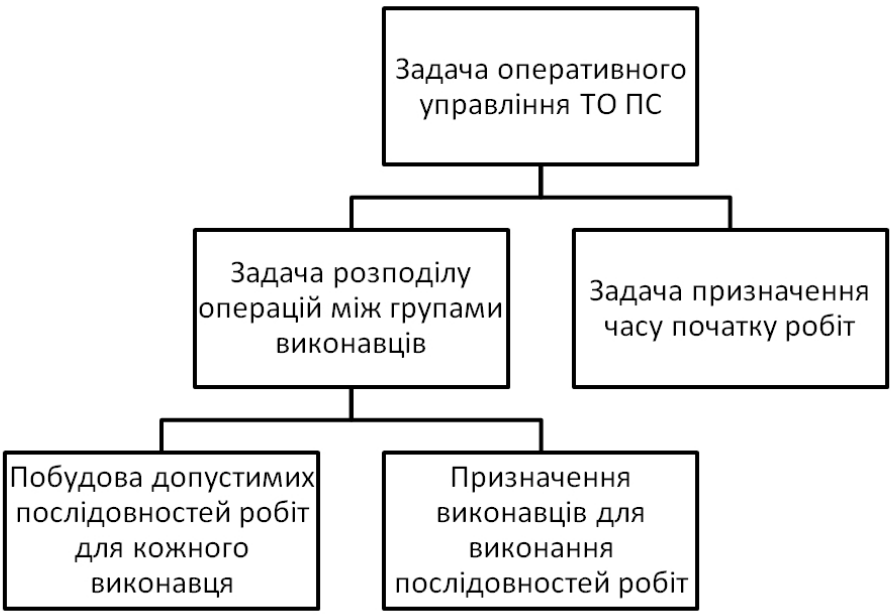

Рис. 1. Декомпозиція задачі оперативного управління ТО ПС

Це дозволяє позбавитись від нелінійності, і таким чином дає можливість рішення її засобами інформаційної техніки.

Основні положення і позначення

Задача відноситься до класу екстремальних комбінаторних задач із лінійною структурою. Попередньо математична модель задачі шляхом найпростіших перетворень зводиться до канонічного вигляду:

$$f(x) = \sum_{i \in I_O} c_i x_i \to \max \qquad (1)$$

при виконанні обмежень

$$g_i(x) = \sum_{i \in I_j} a_{ji} x_i \le b_j, \ j = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

$$x_i \in \{0,1\}, \ i = \overline{1,m}.$$

Тут I_o, I_j – множини номерів змінних, що входять відповідно у критеріальну функцію та j-е обмеження задачі;

a_{ji}, b_j, c_i – задані дійсні числа, що є відповідно коефіцієнтами й вільними членами обмежень, коефіцієнтами критеріальної функції;

m – кількість змінних у математичній моделі задачі розробки управлінського рішення;

n – кількість обмежень.

Для рішення таких задач розроблено метод направленого перебору варіантів [1], в основу котрого положено широко відому ідею гілок та границь, раніше реалізована стосовно до лінійних задач дискретного програмування.

Цей метод полягає у послідовному дробленні вихідної множини варіантів рішення задачі, що виконується до тих пір, поки не встановлюється оптимальний план чи факт несумісності системи обмежень. Розбиття множини варіантів рішення задачі (або будь-якої її підмножини) на дві рівних по потужності підмножини, що не перетинаються, формально виконується шляхом фіксації значень одної із змінних.

Для подальшого розбиття на кожному етапі рішення задачі обирається така підмножина варіантів, котрій відповідає максимальна оцінка критеріальної функції. Отримані у результаті розбиття нові підмножини варіантів підлягають формальному аналізу, метою котрого є:

– виявлення і виключення з подальшого розгляду підмножин, що не містять припустимих планів;

– виявлення та виключення із подальшого розгляду обмежень, що перестали бути активними по відношенню до планів підмножини, що аналізується;

– присвоєння змінним єдино припустимих значень.

Повна множина G варіантів рішення задачі (1)–(2) представляє собою прямий декартовий добуток:

$$G = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m,$$

де X_i – множина можливих значень змінної x_i.

Оскільки $x_i \in \{0,1\}$, $i = \overline{1,m}$, множина G складається із 2^m різних двійкових m-розрядних комбінацій від $(0,0,\ldots,0)$ до $(1,1,\ldots,1)$.

Припустимо, до початку деякого етапу рішення задачі (1)–(2) у повній множині G варіантів виділено l множин G_k, $k = \overline{1,l}$, що не перетинаються і містять допустимі плани.

Позначимо символами I_k^0 и I_k^1 множини номерів змінних, що були отримані у планах k-ї множини варіантів значень 0 и 1 відповідно, а символом I_k – сукупність номерів змінних, значення котрих у G_k не зафіксовані. Аналогічні множини, що відносяться тільки до критеріальної функції (1), визначаються за формулами:

$$I_{0k}^0 = I_0 \cap I_k^0, \ I_{0k}^1 = I_0 \cap I_k^1,$$

$$I_{0k} = I_0 \cap I_k.$$

Склад таких множин, що відносяться до j-го обмеження системи (2), встановлюється згідно формул:

$$I_{jk}^0 = I_j \cap I_k^0, \ I_{jk}^1 = I_j \cap I_k^1,$$

$$I_{jk} = I_j \cap I_k, \ j = \overline{1,n}.$$

Задача (1)–(2), приведена у відповідність k-й множині варіантів, формулюється наступним чином:

максимізувати критеріальну функцію

$$f(x) = \sum_{i \in I_{0k}} c_i x_i + c_k^1 \qquad (3)$$

при виконанні обмежень

$$g_{jk}(x) = \sum_{i \in I_{jk}} a_{ji} x_i \le b_{jk}, \quad j \in J_k; \qquad (4)$$

$$x_i \in \{0,1\},\ i \in I_k,$$

тут c_k^1 – сума коефіцієнтів критеріальної функції, із якими у виразі (1) входили змінні, що отримали у частковому плані підмножини G_k значення одиниці:

$$c_k^1 = \sum_{i \in I_{0k}^1} c_i;$$

b_{jk} – вільний член j-го обмеження системи (2), зменшений на суму коефіцієнтів, з якими у це обмеження входили змінні, що отримали у частковому плані k-ї підмножини варіантів значення одиниці:

$$b_{jk} = b_j - \sum_{i \in I_{jk}^1} a_{ji}, \quad j \in J_k;$$

J_k – множина номерів обмежень системи (2), активних по відношенню до планів підмножини варіантів G_k.

Для дослідження моделі (3)–(4) на множинах I_{0k} и I_{jk}, $j \in J_k$ виділяють наступні підмножини:

I_{Ok}^2, I_{Ok}^3 – сукупності номерів змінних, що входять у критеріальну функцію (3), відповідно, із від'ємними і додатними коефіцієнтами:

$$I_{Ok}^2 = \{ i \in I_{Ok} : c_i < 0 \},$$

$$I_{Ok}^3 = \{ i \in I_{Ok} : c_i > 0 \};$$

I_{jk}^2, I_{jk}^3 – сукупність номерів змінних, що входять, відповідно, із від'ємними і додатними коефіцієнтами у j-е обмеження системи (4):

$$I_{jk}^2 = \{ i \in I_{jk} : a_{ji} < 0 \},$$

$$I_{jk}^3 = \{ i \in I_{jk} : a_{ji} > 0 \};$$

$I_{jk}^2(i')$ – множина номерів змінних, що входять у j-е обмеження системи (4) із від'ємними коефіцієнтами, що не перевищують значення $a_{ji'}$, $i' \in I_{jk}^2$:

$$I_{jk}^2(i') = \{ i' \} \cup \{ i \in I_{jk}^2 : a_{ji} \le a_{ji'} \};$$

$I_{jk}^3(i'')$ – множина номерів змінних, що входять у j-е обмеження системи (4) із додатними коефіцієнтами, не меншими, ніж $a_{ji''}$, $i'' \in I_{jk}^3$:

$$I_{jk}^3(i'') = \{ i'' \} \cup \{ i \in I_{jk}^3 : a_{ji} \ge a_{ji''} \}.$$

Надалі застосовуються наступні позначення:

m – кількість незалежних змінних, значення котрих у планах k-ї підмножини варіантів не зафіксовані: $m_k = |I_k|$;

$m_{Ok}^{(p)}$, $m_{jk}^{(p)}$ – кількість змінних, що входять, відповідно, у критеріальну функцію (3) та j-е обмеження системи (4) із від'ємними (при $p = 2$) і додатними (при $p = 3$) коефіцієнтами:

$$m_{Ok}^{(p)} = \left| I_{Ok}^p \right|,\ m_{jk}^{(p)} = \left| I_{jk}^p \right|,$$

$$j \in J_k;\ p \in \{2,3\};$$

$\overline{m_{Ok}}$, $\overline{m_{jk}}$ – кількість змінних, що не мають конкретних значень у планах k-ї підмножини варіантів і не входять, відповідно, у критеріальну функцію (3) і j-е обмеження системи (4):

$$\overline{m_{Ok}} = m_k - m_{Ok}^{(2)} - m_{Ok}^{(3)},$$

$$\overline{m_{jk}} = m_k - m_{jk}^{(2)} - m_{jk}^{(3)}; \quad j \in J_k.$$

Позначимо символами $S_{jk}^{(2)}$ та $S_{jk}^{(3)}$ суми від'ємних і додатних коефіцієнтів j-го обмеження системи (4), відповідно:

$$S_{jk}^{(p)} = \sum_{i \in I_{jk}^p} a_{ji};\ \mathrm{p} \in \{2, 3\},\ j \in J_k.$$

Обчислення оцінки критеріальної функції

Оцінка критеріальної функції на кожній k-й підмножині варіантів розв'язку лінійної комбінаторної задачі обчислюється також із урахуванням мінімально необхідної u_k і максимально допустимої v_k кількості одиниць у доповнюючих планах даної підмножини. Параметри u_k і v_k визначаються на основі підрахунку мінімально необхідної u_k й максимально припустимої v_k кількості одиниць у доповнюючи планах підмножини G_k, при котрій можливе виконання j-го обмеження системи (4). Її нелінійність дозволяє застосовувати для цього порівняно просту процедуру.

Якщо $b_{jk} \geq 0$, то $u_{jk} = 0$. У протилежному випадку для визначення u_{jk} виконуються наступні дії:

1) від'ємні коефіцієнти j-го обмеження системи (4) a_{ji}, $i \in I_{jk}^2$ впорядковуються по мірі неспадання:

$$a_{ji_1} \leq a_{ji_2} \leq \ldots \leq a_{ji_\mu} \leq \ldots \leq a_{ji_{m_{jk}^{(2)}}}$$

2) шляхом покрокового додавання чергового елементу цій послідовності до суми попередніх встановлюється найменша кількість $\lambda_{\min}$ від'ємних коефіцієнтів, сума яких не перевищує значення вільного члену b_{jk}:

$$\lambda_{\min} = \min\left\{ \lambda \geq 1 : \sum_{\mu=1}^{\lambda} a_{ji_\mu} \leq b_{jk} \right\};$$

3) параметру u_{jk} присвоюється значення.

Якщо $S_{jk}^{(2)} + S_{jk}^{(3)} \leq b_{jk}$, то $v_{jk} = m_k$. У протилежному випадку для визначення v_{jk} виконуються наступні дії:

1) додатні коефіцієнти j-го обмеження системи (4) a_{ji}, $i \in I_{jk}^3$ впорядковуються по мірі неспадання:

$$a_{ji_1} \leq a_{ji_2} \leq \ldots \leq a_{ji_\mu} \leq \ldots \leq a_{ji_{m_{jk}^{(3)}}};$$

2) шляхом покрокового додавання чергового елементу цієї послідовності до суми від'ємних коефіцієнтів $S_{jk}^{(2)}$ і попередніх елементів встановлюється найбільша кількість $\lambda_{\max}$ додатних коефіцієнтів, які у загальній сумі із від'ємними не перевищують значення вільного члена b_{jk}:

$$\lambda_{\max} = \max\left\{ \lambda \leq m_{jk}^{(3)} : S_{jk}^{(2)} + \sum_{\mu=1}^{\lambda} a_{ji_\mu} \leq b_{jk} \right\};$$

3) параметру v_{jk} присвоюється наступне значення:

$$v_{jk} = m_{jk}^{(2)} + \overline{m_{jk}} + \lambda_{\max}.$$

Оцінка $\xi(G_k)$ критеріальної функції на k-й підмножині варіантів розв'язку лінійної комбінаторної задачі обчислюється також як сума двох складових: константи c_k^1, що визначається частковим планом даної підмножини, і приростом $\delta(G_k)$, котрий є функцією незалежних змінних, що утворюють доповнюючи плани G_k. Лінійність критеріальної функції дозволяє застосовувати для обчислення приросту $\delta(G_k)$ порівняно просту процедуру.

Якщо $v_k = 0$, то $\delta(G_k) = 0$.

При виконанні умови $u_k - \overline{m_{Ok}} \leq m_{Ok}^{(3)} \leq v_k$ величина $\delta(G_k)$ приймає своє максимальне значення, рівне сумі додатних коефіцієнтів критеріальної функції (3):

$$\delta(G_k) = \sum_{i \in I_{Ok}^3} c_i.$$

У всіх інших випадках для обчислення $\delta(G_k)$ необхідно впорядкувати коефіцієнти критеріальної функції (3) c_i, $i \in I_{Ok}$ по мірі незростання:

$$c_{i_1} \geq c_{i_2} \geq \ldots \geq c_{i_\mu} \geq \ldots \geq c_{i_{m_{Ok}}}.$$

Тоді значення $\delta(G_k)$ може бути визначено згідно формулі:

$$\delta(G_k) = \begin{cases} \sum\limits_{\mu=1}^{v_k} c_{i_\mu}, \text{якщо } m_{Ok}^{(3)} > v_k \\ \sum\limits_{\mu=1}^{u_k - \overline{m_{Ok}}} c_{i_\mu}, \text{ якщо } u_k - \overline{m_{Ok}} > m_{Ok}^{(3)} \end{cases}$$

Аналіз підмножин варіантів

Властивості k-ї, $k = \overline{1,l}$ підмножини варіантів розв'язку лінійної комбінаторної задачі формулюється у вигляді чотирьох наступних положень.

ПОЛОЖЕННЯ 1. Підмножина G_k не містить допустимих планів, якщо для деякого $j \in J_k$, виконується одна із умов:

а) $I_{jk}^2 = \varnothing$ та $b_{jk} < 0$;

б) $I_{jk}^2 \neq \varnothing$, але $S_{jk}^{(2)} > b_{jk}$.

ПОЛОЖЕННЯ 2. Обмеження $j \in J_k$ не є активним по відношенню до планів підмножини G_k, якщо для нього виконується одна із умов:

а) $I_{jk}^3 = \varnothing$ та $b_{jk} > 0$;

б) $I_{jk}^3 \neq \varnothing$, але $S_{jk}^{(3)} \leq b_{jk}$.

ПОЛОЖЕННЯ 3. Якщо $I_{jk}^{2} \neq \varnothing$, $j \in J_k$, і для деякого $i' \in I_{jk}^{2}$ виконується умова

$$S_{jk}^{(2)} \leq b_{jk} < S_{jk}^{(2)} - a_{ji'},$$

то із доповнюючих планів підмножини G_k припустимими можуть бути лише ті, у яких

$$\left[\forall i \in I_{jk}^{2}(i')\right]\left[x_i = 1\right].$$

ПОЛОЖЕННЯ 4. Якщо $I_{jk}^{3} \neq \varnothing$, $j \in J_k$ і для деякого $i'' \in I_{jk}^{3}$, виконується одна із умов:

а) $I_{jk}^{2} = \varnothing$ та $0 \leq b_{jk} < a_{ji''}$;

б) $I_{jk}^{2} \neq \varnothing$, але $S_{jk}^{(2)} \leq b_{jk} < S_{jk}^{(2)} + a_{ji''}$,

то з доповнюючих планів підмножини G_k допустимими можуть бути лише ті, у яких

$$\left[\forall i \in I_{jk}^{3}(i'')\right]\left[x_i = 0\right].$$

Процедура аналізу k-ї підмножини варіантів розв'язку лінійної комбінаторної задачі (рис. 2) полягає у послідовній перевірці виконання умов кожного із сформульованих положень для усіх обмежень системи (4). В залежності від результатів цієї перевірки у циклі аналізу відбувається та чи інша послідовність дій.

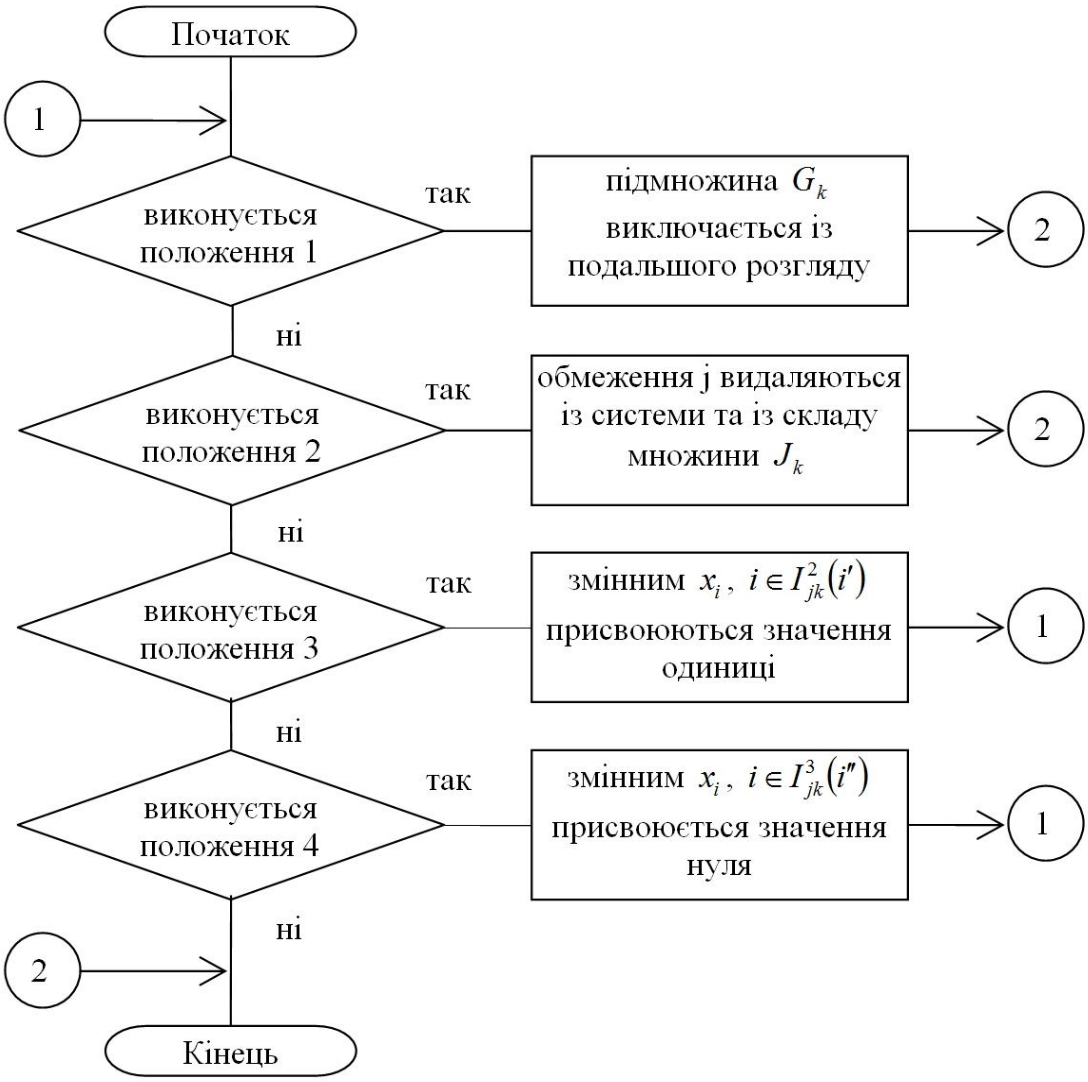

Рис. 2. Процедура аналізу підмножини варіантів розв'язку задачі

1. Якщо для деякого обмеження $j \in J_k$ виконується одна із умов положення 1, підмножина G_k виключається із подальшого розгляду.

2. Обмеження $j \in J_k$, для яких виконуються умови положення 2, видаляються із системи (4), а їх номера – із складу множини J_k.

3. Якщо для деякого $i' \in I_{jk}^{2}$, $j \in J_k^{*}$ виконується умова положення 3, незалежним змінним x_i, $i \in I_{jk}^{2}(i')$ присвоюються значення

одиниці. Ці значення підставляються у всі обмеження $j \in J_k^*$, після чого відбувається повторний цикл аналізу k-ї підмножини варіантів.

4. Якщо для деякого $i'' \in I_{jk}^3$, $j \in J_k^*$ виконується одна із умов положення 4, то незалежним змінним x_i, $i \in I_{jk}^3(i'')$ присвоюється значення нуля. Ці значення підставляються у всі обмеження $j \in J_k^*$, після чого здійснюється повторний цикл аналізу підмножини G_k.

Перевірку виконання умови положення 3 для чергового j-го обмеження, $j \in J_k^*$, рекомендується розпочинати, розглядаючи у якості $a_{ji'}$ мінімальний (від'ємний) коефіцієнт функції $g_{jk}(x)$:

$$a_{ji'} = \min\left\{a_{ji}, i \in I_{jk}^2\right\}.$$

В результаті, якщо при такому виборі $a_{ji'}$ умова положення 3 виконується, у якості параметру доцільно використовувати коефіцієнт $a_{ji'} = \max\left\{a_{ji}, i \in I_{jk}^2 : S_{jk}^{(2)} - a_{ji} > b_{jk}\right\}$.

Виконання умов положення 4 для чергового j-го обмеження, $j \in J_k^*$, спочатку перевіряється для випадку, коли у якості $a_{ji''}$ виступає максимальний (додатній) коефіцієнт функції $g_{jk}(x)$:

$$a_{ji''} = \max\left\{a_{ji}, i \in I_{jk}^3\right\}.$$

Якщо при такому виборі $a_{ji''}$ виконується одна із умов положення 4, то в подальшому у якості цього параметру розглядається коефіцієнт $a_{ji''} = \min\left\{a_{ji}, i \in I_{jk}^3 : S_{jk}^{(2)} + a_{ji} > b_{jk}\right\}$.

Такий вибір параметрів $a_{ji'}$ і $a_{ji''}$ забезпечує відтин від G_k найбільших по потужності підмножин варіантів, що не містять допустимих планів.

Задачі (1)–(2) відносяться до класу *NP*–повних задач. Це означає, що теоретична оцінка тривалості їх розв'язання експоненціально залежить від розмірності математичної моделі. Однак на практиці аналіз підмножин варіантів, що оснований на сформульованих вище положеннях, дозволяє суттєво скоротити кількість кроків алгоритму і тим самим знизити витрати машинного часу у межах тридцяти відсотків.

Висновки

Розглянуто задачу призначення виконавців для виконання послідовностей робіт технічного обслуговування повітряних суден, що є результатом декомпозиції задачі керування передпольотним технічним обслуговуванням. У наведеній постановці модель задачі є лінійною, що дозволяє застосовувати інформаційні технології для підвищення ефективності обчислення.

Наведено оцінку критеріальної функції на кожній підмножині варіантів розв'язку лінійної комбінаторної задачі, що виконується шляхом обчислення вказаної послідовності кроків.

Теоретична оцінка тривалості розв'язання задачі експоненціально залежить від розмірності математичної моделі. Однак використовуючи запропонований аналіз підмножин варіантів, дозволяє скоротити кількість кроків алгоритму, що призводять до кінцевого результату.

Список літератури

1. Литвиненко А.Е. Метод направленного перебора в системах управления и диагностирования / А. Е. Литвиненко. – К.: Наук.-вид. центр НВУВ, 2007. – 328 с.

2. Жолдаков О.О.. Алгоритм побудови множини припустимих послідовностей робіт для виконавців технічного обслуговування повітряних суден. Проблеми інформатизації та управління. Збірник наукових праць: Випуск 2 (34) – К.: НАУ, 2011. – 148 с.

3. Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков – СПб: Питер, 2001. – 304 с.